

2. ÁLGEBRA DE BOOLE

- 2.1.- Definición.
- 2.2.- Operaciones básicas.
- 2.3.- Propiedades o teoremas del álgebra de Boole.
- 2.4.- Función Booleana / Lógica.
- 2.5.- Representación de función Booleana.
- 2.6.- Formas canónicas de una función Booleana.
- 2.7.- Pasos entre formas canónicas.

2.1.- DEFINICIÓN.

Un álgebra de Boole es aquella que utiliza variables que sólo pueden tomar 2 valores llamadas variables booleanas.

A los dos valores diferentes de una variable booleana se les codifica con los bits “0” y “1”. Estos valores no representan dígitos numéricos, sino que representan dos estados distintos de un dispositivo.

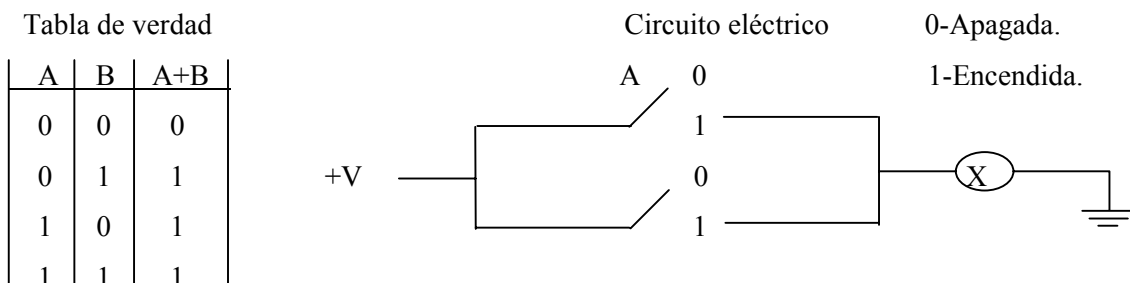
2.2.- OPERACIONES BÁSICAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE. OPERACIONES LÓGICAS.

- La suma lógica: Representa la unión de dos conjuntos (AUB).

Supuestas dos variables lógicas A y B.

$$A + B = \begin{cases} 1 & A \text{ ó } B \text{ ó } A \text{ y } B = 1 \\ 0 & A \text{ y } B = 0 \end{cases}$$

La suma lógica de dos variables vale 1 cuando A ó B ó ambas sean 1.



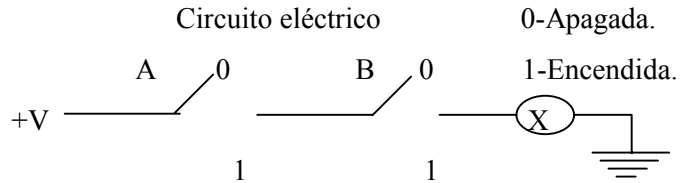
- Producto lógico: Representa la intersección de dos conjuntos ($A \cap B$).

Supuestas dos variables lógicas A y B.

$$A \cdot B \begin{cases} 1 \rightarrow A \text{ y } B = 1 \\ 0 \rightarrow A \text{ ó } B = 0 \end{cases}$$

T. V

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



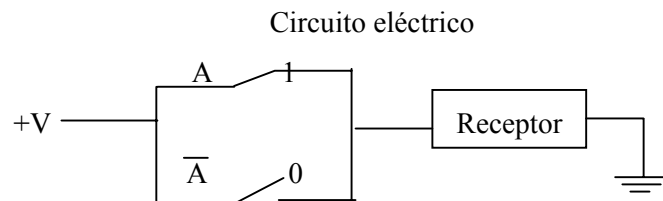
- Inversión: La inversión se define para una sola variable y se puede representar como \bar{A} o A' .

\bar{A} vale 1 cuando $A \neq 1$ es decir cuando $A = 0$.

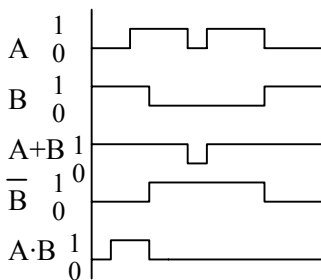
\bar{A} vale 0 cuando $A \neq 0$ es decir cuando $A = 1$.

T. V

A	\bar{A}
0	1
1	0



- Representación gráfica de variables y funciones. Los conodiagramas.



2.3.- TEOREMAS DEL ÁLGEBRA DE BOOLE.

- Teorema 1: El resultado de aplicar cualquiera de las tres operaciones definidas a variables del sistema booleano es otra variable del sistema y este resultado es único. Este teorema se llama Ley interna.
- Teorema 2: Ley de involución: una variable doblemente complementada es ella misma ($\overline{\bar{A}} = A$).
- Teorema 3: Ley de idempotencia: $A + A = A$; $A \cdot A = A$.
- Teorema 4: Ley conmutativa: $A + B = B + A$; $A \cdot B = B \cdot A$.

- Teorema 5: Ley asociativa $\begin{cases} (A + B) + C = A + (B + C) \\ (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \end{cases}$
- Teorema 6: Ley distributiva $\begin{cases} A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) \\ A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C) \end{cases}$
- Teorema 7: Ley de absorción $\begin{cases} A + AB = A \\ A \cdot (A + B) = A \end{cases}$
- Teorema 8: Leyes de Morgan $\begin{cases} \overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B} \\ \overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B} \end{cases}$

Todos estos teoremas pueden demostrarse haciendo uso de las tablas de verdad.

$$\begin{array}{lll} X + 0 = X & X + 1 = 1 & X + \bar{X} = 1 \\ X \cdot 0 = 0 & X \cdot 1 = X & X \cdot \bar{X} = 0 \end{array}$$

2..4- FUNCIÓN BOOLEANA / LÓGICA.

Una función booleana es un conjunto de variables relacionadas entre sí mediante los tres operadores lógicos.

Una función booleana es también una variable booleana.

2.5.- REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES LÓGICAS.

- Forma algebraica general:

$$F(A, B, C, D) = \bar{A} + \bar{A}BC + \bar{A}BCD$$

Es la combinación de variables relacionadas por las operaciones lógicas. Esta forma de representación tiene el inconveniente de que no es única, pudiendo haber infinitas representaciones para una misma función.

- Mediante la tabla de verdad:

Son tablas en las cuales figuran todas las combinaciones posibles de las variables de entrada y el valor correspondiente de la función para cada una de ellas. Este tipo de representación elimina el inconveniente de la forma anterior ya que toda función tiene una única tabla de verdad.

Una tabla de verdad, consta de tantas columnas de entrada como variables tenga la función y una única columna de salida.

Para obtener la tabla de verdad por el método de columnas auxiliares para obtener la función de salida, es muy aconsejable simplificar al máximo la función dada.

Ejemplo

Obtener la tabla de verdad de $F(A, B, C, D) = (A + \overline{BC} + D)(A + \overline{BC} + \overline{CD})(\overline{AB}) =$

$$= (A + \overline{ABC} + \overline{ACD} + \overline{BC} + \overline{BD} + DA + \overline{DBC} + \overline{DC})(\overline{ABAB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} + \overline{ABC} + \overline{ADB} + \overline{DBAC} + \overline{ABCD}) = \overline{AB} \{1 + m\} = \overline{AB}$$

A	B	C	D	F	B
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0

2.6 FORMAS CANÓNICAS DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA:

Es la mejor manera de representar las funciones. Une las ventajas de la forma algebraica y de la tabla de verdad.

1ª Forma canónica:

- Forma algebraica: se dice que una función está escrita en 1ª forma canónica forma algebraica si contiene solamente sumas de productos canónicos. Un producto canónico es aquel que contiene todas las variables de las que depende la función.

- Paso de la 1ª forma canónica algebraica a la tabla de verdad: Cada producto canónico nos genera un 1 en la columna de la función. En cada producto canónico se hace la siguiente sustitución: variables si complementar = “1” y variables complementadas = “0”.

$$\overline{ABC} = 000 \quad ; \quad \overline{A}BC = 010 \quad ; \quad A\overline{B}C = 101$$

- Forma numérica: Representa de forma sencilla la forma canónica y es la suma de minterms. Cada minterm representa un producto canónico que vendrá determinado por el subíndice del minterm, este subíndice representa el equivalente decimal de la combinación binaria de entrada asociada a cada producto canónico.

$$\text{Ejemplo: } F = \sum m_i = m_0 + m_3 + m_6 + m_7 \quad ; \quad F(A, B, C) = m(0, 3, 6, 7).$$

2ª Forma canónica:

- Forma Algebraica: Se dice que una función está expresada en 2ª forma canónica forma algebraica, si está constituida solamente por productos de sumas canónicas.
- Una suma canónica es aquella que contiene todas las variables de las que depende la función.
- Paso directo de la 2ª forma canónica algebraica a la tabla de verdad: Cada suma canónica genera un “0” en la función. En cada suma canónica se ha de realizar la siguiente equivalencia: variable complementada = “1”, variable sin complementar = “0”.
- Forma numérica: la segunda forma canónica es un producto de maxterms. Cada maxterm representa una suma canónica, la cual queda identificada mediante el subíndice (i) que se determina a partir de la relación de subíndices.

$$m_i + M_i = 2^n - 1 \quad ; \quad \text{Siendo “n” el nº de variables de la función.}$$

La 1ª forma canónica representa los “1” de la tabla de verdad, mientras que la 2ª forma canónica representa los “0”. Como la tabla de verdad es única, ambas formas canónicas son únicas.

2.7 . PASOS ENTRE FORMAS CANÓNICAS

Para realizar el paso entre formas canónicas ambas funciones deben estar expresadas en forma numérica.

$$m_i + M_i = 2^n - 1$$

Tenemos la siguiente función:

$$F(A,B,C,D) = M(0,2,3,4,6,8,10,12,13,14)$$

m_i	A	B	C	D	F	M_i
0	0	0	0	0	1	15
1	0	0	0	1	0	14
2	0	0	1	0	0	13
3	0	0	1	1	0	12
4	0	1	0	0	1	11
5	0	1	0	1	0	10
6	0	1	1	0	1	9
7	0	1	1	1	0	8
8	1	0	0	0	1	7
9	1	0	0	1	0	6
10	1	0	1	0	1	5
11	1	0	1	1	0	4
12	1	1	0	0	1	3
13	1	1	0	1	0	2
14	1	1	1	0	1	1
15	1	1	1	1	0	0

por la expresión: $m_i + M_i = 2^n - 1$

M_i	0	2	4	6	8	10	12	13	14
m_i	15	13	11	9	7	5	3	2	1



minterms que no son (no están a 1)

$$f(A,B,C,D) = m_i(0,4,6,8,10,12,14)$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 0 = 16 - 1 = 15$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 2 = 16 - 3 = 13$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 4 = 16 - 5 = 11$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 6 = 16 - 7 = 9$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 8 = 16 - 9 = 7$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 10 = 16 - 11 = 5$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 12 = 16 - 13 = 3$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 13 = 16 - 14 = 2$$

$$m_i = 2^4 - 1 - 14 = 16 - 15 = 1$$